Matrikel								SKZ				Name	

Klausur 2

Berechenbarkeit und Komplexität

22. Januar 2010

Bitte markieren Sie die jeweils richtige Antwort.

Aufgabe 1 *Gilt...*

1		nein

... $\sum_{k=1}^{n} k^2 = O(n^2)$?

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$

2	ja	

... $(n^2 + 3n \log n)(n \log n + \log n) = O(n^3 \log n)$?

$\cdots = O(n^2)O(n \log n) = \cdots$

3	ja	

... $\forall p \in \mathbb{N}: \log(n^p) = O(\log n)$?

$\log(n^p) = \log(\underbrace{n \cdot \cdots \cdot n}_{p \text{ Faktoren}}) = \underbrace{\log n + \cdots + \log n}_{p \text{ Summanden}} = p \log n = O(\log n)$.

4	ja	

... $\log(n^n) = O(n\sqrt{n})$?

$\log(n^n) = \log(\underbrace{n \cdot \cdots \cdot n}_{n \text{ Faktoren}}) = \underbrace{\log n + \cdots + \log n}_{n \text{ Summanden}} = n \log n$, *und* $\log n = O(\sqrt{n})$.

5		nein

... *aus* $f(n) = O(2^n)$ *und* $g(n) = O(2^n)$ *folgt* $f(n)g(n) = O(2^n)$.

Ein Gegebenbeispiel ist etwa $f(n) = g(n) = 2^n$.

Aufgabe 2 *Die rekursiven Funktionen f und g seien durch*

$$f(x, r) = \min_y \; x^2 + y^2 \geq r^2$$

und

$$g(x, r) = \min_y \; x^2 + y^2 = r^2$$

gegeben.

6		nein

Ist $f(1, 2) = \sqrt{3}$?

Sondern $f(1, 2) = 2$. *Bei rekursiven Funktionen bedeutet die Minimierung das Auffinden der kleinsten Lösung in* $\mathbb{N}$.

7	ja	

Ist $g(4, 5)$ *definiert?*

$g(4, 5) = 3$, *weil* $y = 3$ *die kleinste (und einzige) Lösung in* $\mathbb{N}$ *von* $4^2 + y^2 = 5^2$ *ist.*

8	ja	

Ist f primitiv rekursiv?

Weil $f(x, r) \leq r$ *reicht eine (durch r) beschränkte Minimierung zur Berechnung von* $f(x, r)$ *aus. Wir können die kleinste Lösung* y *von* $x^2 + y^2 \geq r^2$ *in einer Schleife* `for y = 0 to r do ...` *suchen. Diese for-Schleife lässt sich dann in eine primitive Rekursion übersetzen, in der ein Parameter von r bis 0 hinunterzählt.*

9		nein

Ist g primitiv rekursiv?

Primitiv rekursive Funktion sind stets total. (For-Schleifen terminieren immer). Aber g ist nicht total (Zum Beispiel ist $g(1, 3)$ nicht definiert). Also kann g nicht primitiv rekursiv sein.

Aufgabe 3 *Auf* $\mathbb{N}$ *sei ein Prädikat* P *durch*

$$P(n) = \exists a \in \mathbb{Z} \; \exists b \in \mathbb{Z} \; 2a + nb = 1$$

definiert.

10	ja	

Ist P entscheidbar? (Genauer, ist folgendes Problem entscheidbar: Instanz: eine natürliche Zahl n. Frage: Gilt $P(n)$?)

Die Definition von $P(n)$ lässt sich nicht direkt in einen Entscheidungsalgorithmus übersetzen. Man kann zwar in zwei geschachtelte Schleifen nach passenden a und b suchen, allerdings terminiert diese Suche nicht, falls es keine Lösung gibt. Wir erhalten so also nur einen Semientscheidungsalgorithmus.
Trotzdem gibt es einen Entscheidungsalgorithmus, denn: $P(n)$ ist genau für die ungeraden n erfüllt.
Falls n gerade ist, kann $2a + nb = 1$ keine Lösung haben, da die linke Seite immer gerade bleibt und so nie der ungeraden Zahl 1 gleich wird.
Falls n ungerade ist, gibt es Lösungen (a, b): Nimm etwa $b = 1$ und erhalte a durch Lösen von $2a + nb = 1$, das geht sich dann ganzzahlig aus.
Bemerkung: Allgemein gilt:

$$\exists a \in \mathbb{Z}\ \exists b \in \mathbb{Z}\ ma + nb = 1$$

genau dann wenn m und n grössten gemeinsamen Teiler 1 haben.

11	ja	

Ist P primitiv rekursiv?

$P(n)$ ist genau für die ungeraden n erfüllt.
Eine primitiv rekursive Definition ist: $p(n) = 1 - p(n-1)$ für $n > 0$ und $p(0) = 0$.

Aufgabe 4 *Betrachten Sie die folgenden Probleme:*
Problem R: *Ist $L(M)$ rekursiv?*
Problem E: *Akzeptiert M das leere Wort?*
Problem S: *Hält M auf der Eingabe $\langle M \rangle$?*
Problem RA: *Ist $L(M)$ rekursiv aufzählbar?*
Problem H: *Akzeptiert M das leere Wort in höchstens 100 Schritten?*
Eines Instanz dieser Probleme ist jeweils der Code $\langle M \rangle$ einer Turingmaschine M, und $L(M)$ bezeichnet die von M akzeptierte Sprache.

12		nein

Ist R *entscheidbar?*

Satz von Rice.

13		nein

Ist E *entscheidbar?*

Satz von Rice.

14		nein

Ist S *entscheidbar?*

Satz von Rice. Die gefragte Eigenschaft ist nicht trivial. Nimm zum Beispiel eine Maschine, die auf jeder Eingabe hält / nicht hält.

15	ja	

Ist RA *entscheidbar?*

$L(M)$ ist stets rekursiv aufzählbar, das Problem ist somit trivial.

16	ja	

Ist H *entscheidbar?*

Simuliere 100 Rechenschritte von M mit Hilfe einer universellen TM.

Aufgabe 5 *Seien L_1 und L_2 rekursiv aufzählbare Sprachen.*

17	ja	

Ist dann auch notwendigerweise $L_1 \cup L_2$ rekursiv aufzählbar?

18	ja	

Ist dann auch notwendigerweise $L_1 \cap L_2$ rekursiv aufzählbar?

Aufgabe 6 *Sei H die Menge der Codes von Turingmaschinen, die auf mindestens einem Eingabewort halten.*

19	ja		*Gibt es eine Turingmaschine, die H generiert?* *Teste, ob Maschine Nummer i auf Wort Nummer j in höchstens k Schritten hält, für alle i, j, k, nach aufsteigendem $i + j + k$ geordnet.*
20		nein	*Gibt es eine Turingmaschine, die das Komplement von H generiert?* *Nein, sonst wäre H entscheidbar. Es ist aber unentscheidbar nach dem Satz von Rice.*

Jede richtige Antwort ergibt einen Punkt. – *Viel Erfolg!*