Matrikel								SKZ				Name	

Klausur 2

Berechenbarkeit und Komplexität

25. Januar 2008

Zu jedem Buchstaben muss entweder ja oder nein angekreuzt werden.

Aufgabe 1 *Seien $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ gegeben durch*

$$L_1 = \{\, \langle M \rangle \mid M \text{ stoppt bei Eingabe } \varepsilon \,\},$$
$$L_2 = \{\, \langle M \rangle \mid M \text{ stoppt bei Eingabe } \varepsilon \text{ nicht} \,\}.$$

Dabei bezeichnet $\langle M \rangle \in \{0,1\}^*$ den Code der Turingmaschine M.

A		nein	*Gibt es eine Turingmaschine, die für ein gegebenes Wort $w \in \{0,1\}^*$ entscheidet, ob $w \in L_1$?*
B	ja		*Gibt es eine Turingmaschine T_1 mit $L(T_1) = L_1$?*
C	ja		*Gibt es eine Turingmaschine T_1' mit $G(T_1') = L_1$, d.h. T_1' generiert L_1?*
D		nein	*Gibt es eine Turingmaschine T_2 mit $L(T_2) = L_2$?*
E	ja		*Ist $\overline{L_1 \cup L_2}$ rekursiv?*

Aufgabe 2 *Die rekursiven Funktionen f und g seien folgendermaßen definiert:*

$$f(x) = \min_{y \in \mathbb{N}} P(y,x) \quad \text{mit } P(y,x) \equiv (y = 2x),$$
$$g(x) = \min_{y \in \mathbb{N}} Q(y,x) \quad \text{mit } Q(y,x) \equiv (2y = x).$$

A	ja		*Ist f primitiv rekursiv?*
B		nein	*Ist g primitiv rekursiv?* *g ist eine partielle Funktion und kann somit nicht primitiv rekursiv sein.*
C	ja		*Ist g Turing-berechenbar?* *g ist rekursiv und damit Turing-berechenbar.*
D		nein	*Sei $h_1(x) = f(g(x))$. Ist h_1 primitiv rekursiv?*
E	ja		*Sei $h_2(x) = g(f(x))$. Ist h_2 primitiv rekursiv?* *$h_2(x) = x$. Die Identitätsfunktion ist primitiv rekursiv.*

Aufgabe 3 *Gelten folgende Aussagen über die Komplexität von Funktionen?*

A	ja		$n^2 = O(2^n)$
B	ja		$\log(n^4) = O\big(\log(n^3)\big)$
C		nein	$4^n = O(3^n)$
D	ja		$\log(n) = O(\sqrt{n})$
E	ja		$n \log(n) \log(\log(n)) = O(n^2)$
F		nein	$4n^4 + 5^n + n! = O(6^n)$

Aufgabe 4 *Sei M eine Turingmaschine mit dem Eingabealphabet $\{0,1\}$ und folgender Eigenschaft: Wenn M auf einem Eingabewort der Länge n hält, dann tut sie das in weniger als n^4 Schritten.*

A		nein

Akzeptiert M das leere Wort?

Das leere Wort müsste in weniger als 0 Schritten akzeptiert werden. Das ist nicht möglich.

B	ja	

Ist $L(M)$ rekursiv?

Sei w das Eingabewort mit $|w| = n$. Man simuliere n^4 Schritte von M. Hat M das Wort w bis dahin nicht akzeptiert, dann tut sie das auch weiterhin nicht. Innerhalb der ersten n^4 Schritte lässt sich somit bestimmen, ob das Wort akzeptiert wird oder nicht.

C	ja	

Gibt es eine Turingmaschine N, die auf einem Eingabewort w genau dann hält, wenn M mit der Eingabe w nicht hält?

N kann zunächst entscheiden, ob M mit Eingabe w hält und anschließend das Gegenteil machen.

D		nein

Sei L' eine rekursive Sprache. Ist das Problem $L' \subseteq L(M)$ entscheidbar?

Satz von Rice.