Aufgabe 26. Geben Sie eine informale Beschreibung der Arbeitsweise einer Turingmaschine, welche die Funktion $f(n) = 2^n$ berechnet. Wir nehmen dabei an, daß $n > 0$ auf dem Eingabeband durch n Einsen gegeben ist. Hinweis: Sie können die Maschine mit mehreren Bändern ausstatten.

Aufgabe 27. Eine Turingmaschine wurde definiert als ein 6-tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$$

wobei $\Sigma \subseteq \Gamma$, $q_0 \in Q$, $F \subseteq Q$ und δ eine partielle Funktion $Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$ ist. Ein Produkt zweier Turingmaschinen $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma_1, q_{1,0}, F_1, \delta_1)$ und $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \Gamma_2, q_{2,0}, F_2, \delta_2)$ ist ein 6-tupel

$$M_1 \times M_2 = (Q_1 \times Q_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2, \Gamma_1 \times \Gamma_2, (q_{1,0}, q_{2,0}), F, \delta_1 \times \delta_2)$$

mit $F \subseteq Q_1 \times Q_2$. Für Paare $(q_1, \gamma_1) \in Q_1 \times \Gamma_1$ und $(q_2, \gamma_2) \in Q_2 \times \Gamma_2$ im Definitionsbereich von δ_1 bzw δ_2 mit $\delta_i(q_i, \gamma_i) = (p_i, g_i, m_i)$ $(i = 1, 2)$ ist

$$\delta_1 \times \delta_2(q_1, q_2, \gamma_1, \gamma_2) = (p_1, p_2, g_1, g_2, m_1, m_2).$$

$M_1 \times M_2$ hat eine natürliche Interpretation als Turingmaschine mit zwei Bändern. Im Falle, dass $\Sigma_1 = \Sigma_2$, kann durch passende Wahl der Menge F der zu akzeptierenden Zustände (und eventuell durch Modifikation von M_1 und M_2), $M_1 \times M_2$ zum Erkennen boolescher Kombinationen von $L(M_1)$ und $L(M_2)$ verwendet werden.
In den folgenden Tabellen sind zwei Turingmaschinen M_1 und M_2 mit $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \{0, 1\}$ gegeben.

M_1	0	1	X	Y	$\sqcup$
p_0	p_1XR	–	–	p_3YR	–
p_1	p_10R	p_2YL	–	p_1YR	–
p_2	p_20L	–	p_0XR	p_2YL	–
p_3	–	–	–	p_3YR	$p_4 \sqcup R$
p_4	–	–	–	–	–

M_2	0	1	$\sqcup$
q_0	q_10R	q_21R	–
q_1	–	q_21R	$q_3 \sqcup S$
q_2	q_10R	–	$q_3 \sqcup S$
q_3	–	–	–

Die Endzustände von M_1 bzw. M_2 sind p_4 bzw q_3.

1. Beschreiben Sie die Sprachen $L(M_1)$ und $L(M_2)$.
2. Wie ist F für $M_1 \times M_2$ festzulegen (und ggf. M_1 und M_2 zu modifizieren), so dass $L(M_1' \times M_2') = L(M_1) \cap L(M_2)$ gilt.
3. Wie ist F für $M_1 \times M_2$ festzulegen (und ggf. M_1 und M_2 zu modifizieren), so dass $L(M_1' \times M_2') = L(M_1) \cup L(M_2)$ gilt.

Aufgabe 28. Sei $w \in \{0, 1\}^*$. Wir bezeichnen mit w^{-1} das Wort aus $\{0, 1\}^*$, welches sich ergibt, indem man w von hinten nach vorn liest.
Gegeben sei die Sprache $L := \left\{ aa^{-1} \,\middle|\, a \in \{0, 1\}^* \right\}$. Geben Sie eine Turingmaschine M an, so daß $L = L(M)$.

Aufgabe 29. Skizzieren Sie eine Überlegung, warum jede Turingmachine mit beidseitig unendlichem Band durch eine Turingmaschine mit einseitig unendlichem Band simuliert werden kann.

Aufgabe 30. Skizzieren Sie eine Überlegung, warum jede Turingmachine mit k Bändern durch eine Turingmaschine mit nur einem Band simuliert werden kann.